PRIMER PARCIAL DE ÁLGEBRA (29/10/2019)

1. Sean

$$\vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix},\vec{u}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix},\quad \vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix},\vec{v}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad \vec{u}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\\alpha\end{pmatrix},\alpha\in\mathbb{R}.$$

(a) (**0.75 puntos**) Demostrar que $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es linealmente independiente.

(b) (**0.75 puntos**) Hallar α para que $\vec{u}$ sea combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ y escribir dicha combinación lineal.

(c) (**1 punto**) Sabiendo que $\mathcal{B}_1=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ y $\mathcal{B}_2=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ son bases del mismo subespacio vectorial, obtener las coordenadas del vector $\vec{x}$ respecto de la base $\mathcal{B}_2$ sabiendo que sus coordenadas con respecto a la base $\mathcal{B}_1$ son $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. Hallar el vector $\vec{x}$.

Sol:

(a) Al reducir la matriz que los tiene en fila obtenemos matrices del mismo rango

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&2&2\\2&1&2&1\end{pmatrix}\underset{\substack{E_{21}(-1)\\E_{31}(-2)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}\underset{\substack{E_{23}\\E_2(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

Ésta última tiene rango tres pues está encabezada por una matriz triangular superior de orden tres y de dte. No nulo

(b) Reducimos la matriz que los tiene en columna

$$\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&1&1&3\\1&2&2&2\\1&2&1&\alpha\end{pmatrix}\underset{\substack{E_{21}(-1)\\E_{31}(-1)\\E_{41}(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&0&-1&2\\0&1&0&1\\0&1&-1&\alpha-1\end{pmatrix}\underset{E_{23}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&0&1\\0&0&-1&2\\0&1&-1&\alpha-1\end{pmatrix}\underset{\substack{E_{12}(-1)\\E_{42}(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\0&0&-1&2\\0&0&-1&\alpha-2\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{E_{13}(2)\\E_{43}(-1)\\E_3(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&\alpha-4\end{pmatrix}$$

Con esta reducción deducimos que $\alpha=4$ y que $\vec{u}=4\vec{u}_1+\vec{u}_2-2\vec{u}_3$.

(c) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}_{B_1}=2\vec{u}_1-\vec{u}_2+\vec{u}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\2\\1\end{pmatrix}_{B_C}$. Ahora lo pasamos de base canónica a la base 2

$$\begin{pmatrix}1&0&0&3\\1&1&1&2\\0&1&0&2\\0&2&1&1\end{pmatrix}\underset{E_{21}(-1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&1&-1\\0&1&0&2\\0&2&1&1\end{pmatrix}\underset{\substack{E_{32}(-1)\\E_{42}(-2)}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&1&-1\\0&0&-1&3\\0&0&-1&3\end{pmatrix}\underset{\substack{E_{23}(-1)\\E_{43}(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&2\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Por lo que $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix}_{B_2}=3\vec{v}_1+2\vec{v}_2-3\vec{v}_3$

2. Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^4$ dados por $S = \mathcal{L}(\{(1,2,0,0),(1,-1,1,0),(3,0,2,0),(2,1,1,0)\})$ y $T = \{(x,y,z,t) : x+y=0, x-z=0, x+t=0\}$.

Se pide:

(a) (**0.75 puntos**) Hallar bases de S y T.

(b) (**0.75 puntos**) Hallar unas ecuaciones implícitas de $S+T$.

(c) (**0.75 puntos**) Hallar las dimensiones de $S+T$ y $S\cap T$.

(d) (**0.25 puntos**) Razonar si $S+T$ es una suma directa.

(a) Empezamos reduciendo el sg que nos dan de S

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \underset{\substack{E_{21}(-1)\\ E_{31}(-3)\\ E_{41}(-2)}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1 & 0\\ 0 & -6 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 1 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Con lo cual, una base de S es $B(S) = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ Para T reducimos la matriz de coeficientes del sistema que lo define

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \underset{\substack{E_{21}(-1)\\ E_{31}(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \underset{\substack{E_{12}(1)\\ E_{32}(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \underset{E_3\left(\frac{1}{2}\right)}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{E_{13}(1)\\ E_{23}(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Por lo que las ecuaciones paramétricas de T son $\begin{matrix}x = -\alpha\\ y == \alpha\\ z = -\alpha\\ t = \alpha\end{matrix}$ y $B(T) = \left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

(b) $S+T = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ y como el menor $\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ de orden tres y triangular superior de valor 2 no nulo quiere decir que los tres vectores del sistema de generadores son l. i. y por lo tanto base de S+T y su dimensión es tres. Sus ecuaciones paramétricas son

$$\begin{gathered} x = \alpha - \gamma\\ y = 2\,\alpha - 3\beta + \gamma\\ z = \beta - \gamma\\ t = \gamma \end{gathered}$$

Y las implícitas son $2x - y - 3z = 0$

© 3=dim(s+T)=2+1-dim(S∩T), por lo que dim(S∩T)=0

(d Sí es suma directa pues su intersección es el vector cero

PRIMER PARCIAL DE ÁLGEBRA (29/10/2019)

3. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, definida por

$$f(1,0,0,1) = (2,-1,-3,-1), \quad f(0,1,1,0) = (1,2,1,2),$$
$$f(0,-1,1,0) = (1,0,-1,0), \quad f(0,0,1,1) = (2,0,-2,0).$$

(a) (**1 puntos**) Hallar la matriz de la aplicación respecto a la base canónica.

(b) (**0.75 punto**) Hallar las dimensiones de los subespacios núcleo e imagen de f.

(c) (**0.75 puntos**) Razonar si f es monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo.

(a) $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \to f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \to f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \to f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \to f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

De aquí deducimos que la matriz del endomorfismo referida a la base canónica es

$$M\left(f, B_4^C\right) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

(b) Reducimos la matriz de la aplicación para calcular su rango, entonces.

$$M\left(f, B_4^C\right) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \underset{E_{31}(1)}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que su rango vale dos, por lo tanto $Rg(A) = 2 = \dim(Im(f))$. Ahora, aplicando la fórmula de las dimensiones $\dim\left(Im(f)\right) + \dim\left(Ker(f)\right) = 4$, deducimos que $\dim\left(Ker(f)\right) = 2$

© Es una simple aplicación lineal, ni inyectiva ($\dim\left(Ker(f)\right) \neq 0$)ni sobreyectiva ($\dim\left(Im(f)\right) \neq 4$).

4. (a) (**1 punto**) Calcular los autovalores λ asociados a la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 6 & 6\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & -4 & -3\end{pmatrix}$ y sus multiplicidades algebraicas $m(\lambda)$.

(b) (**0.75 puntos**) Calcular una base de cada subespacio de autovectores $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$.

(c) (**0.75 puntos**) A la vista de lo anterior, deducir si $\mathbf{A}$ es diagonizable o no. Si lo fuera, dar la matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}$ semejante a la matriz $\mathbf{A}$ y la matriz de paso $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P^{-1}}$.

(a) El polinomio característico asociado es

$$P_3(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

. Con dos raíces $\lambda = -1, 1$ de multiplicidades uno y dos, respectivamente.

(b) Calculemos las bases de diagonalización

$$\lambda = -1, Ker(A+I) = (= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x+3y+3z=0 \\ 2y+z=0 \end{cases} \right\}.$$

Entonces una base de este subespacio –recta será:

$$B\big(Ker(A+I)\big) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\lambda = 1, Ker(A-I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \{y+z=0 \right\}$ Entonces una base de este subespacio –plano será:

$$B\big(Ker(A-I)\big) = \left\{ \vec{w}_{1,} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

La base de autovectores es, entonces

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

La matriz es diagonalizable por ser simples ambos autovalores

© Las ecuaciones del endomorfismo referidas a dicha base son

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{B_{diag}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{B_{diag}}$$

La matriz de paso es $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$